



Universidade Federal de Pernambuco
Departamento de Física

Exame Geral de Doutorado
Primeiro Semestre de 2017

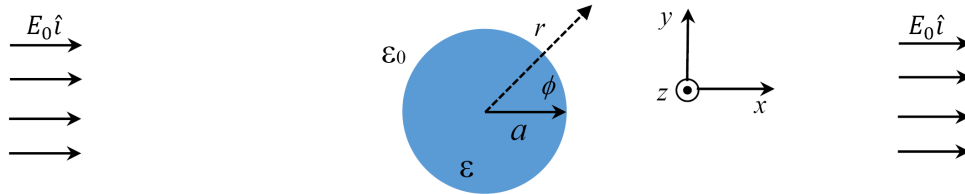
Eletrodinâmica Clássica

07/03/2017 - 09h00 às 12h00

(Escolha três dentre as quatro questões)

QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE

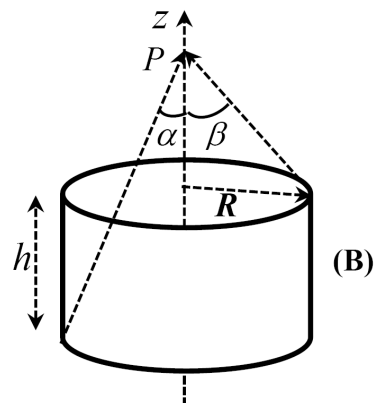
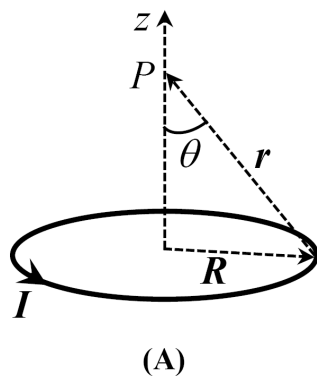
Considere um cilindro dielétrico longo e homogêneo com permissividade ε e raio a , cujo eixo está orientado ao longo da direção z . O cilindro é colocado no espaço livre, permissividade ε_0 , onde existe um campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{i}$. O eixo do cilindro está orientado ao longo da direção z .



- (a) (50%) Determine o potencial elétrico em todo o espaço: (i) $V(r > a, \phi)$ e (ii) $V(r < a, \phi)$.
- (b) (25%) Determine o campo elétrico em todo o espaço: (i) $\vec{E}(r > a, \phi)$ e (ii) $\vec{E}(r < a, \phi)$.
- (c) (15%) Determine as densidades de carga elétrica: (i) volumétricas $\rho(r < a)$ e (ii) superficiais $\sigma(r = a)$.
- (d) (10%) Esboce as linhas de campo elétrico em todo o espaço nas seguintes situações: (i) $\varepsilon > \varepsilon_0$ e (ii) $\varepsilon < \varepsilon_0$.

QUESTÃO 2 – LEI DE BIO-SAVART

Uma espira circular de raio R , é percorrida por uma corrente I , como mostrado na figura (A) abaixo. A espira está localizada no espaço livre cuja permeabilidade magnética é μ_0 .



- (a) (30%) Mostre que o campo magnético \vec{B} , em um ponto P localizado no eixo z perpendicular ao plano da espira é dado por $\vec{B}(\theta) = \hat{z}(\mu_0 I / 2R) \sin^3 \theta$.
- (b) (40%) A figura (B) mostra um solenóide de raio R e comprimento h com n espiras. Cada espira é percorrida por uma corrente I e a densidade de espiras é n/h . Usando o resultado obtido no item (a), determine o campo magnético \vec{B} em um ponto P localizado no eixo z . Expresse sua resposta em termos de $n, \mu_0, I, h, \alpha, \beta$. Obs. Os ângulos β e α definem as posições da primeira e última espiras, respectivamente.
- (c) (10%) Mostre que o resultado obtido no item (b) produz o campo magnético no centro de um solenóide infinito quando tomarmos $\alpha \rightarrow \infty$ e $\beta \rightarrow \pi$, isto é, $B_z = \mu_0 I (n/h)$.
- (d) (20%) Mostre que para um solenóide finito, com $h \gg R$ e $z \ll h$, o campo magnético possui uma dependência quadrática com z , em torno de $z = 0$.
-

QUESTÃO 3 – EQUAÇÕES DE MAXWELL

A figura 1(a) abaixo mostra a seção reta de uma linha de transmissão de comprimento l , formada por duas superfícies cilíndricas metálicas, sendo $l \gg a, b$. A região entre os condutores $a < \rho < b$ está completamente preenchida por um dielétrico de permissividade ε e permeabilidade magnética μ

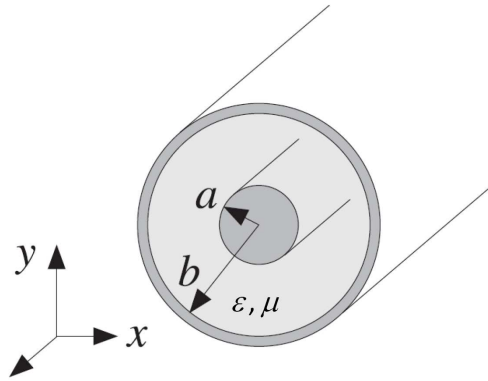


Fig.1(a)

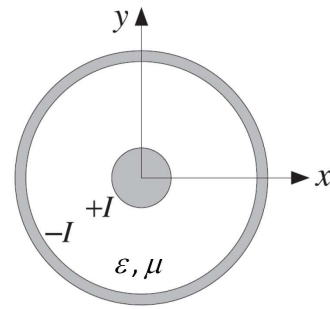
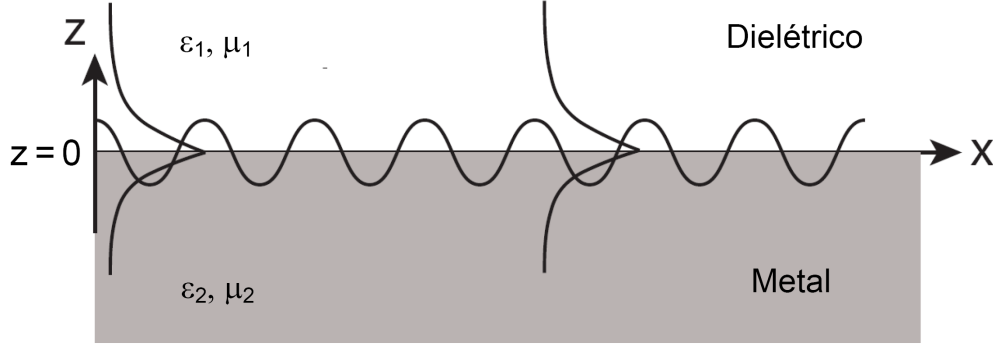


Fig.1(b)

- (a) (20 %) Considerando que o fio interno está carregado com uma carga $+Q$ e a casca cilíndrica está carregada com uma carga $-Q$, calcule a capacitância por unidade de comprimento C , deste sistema.
- (b) (30 %) Considere agora que em uma das extremidades desta linha de transmissão foi feito um curto circuito entre o fio de raio a e a casca metálica de raio interno b . Por outro lado, a outra extremidade do fio foi ligada a uma fonte de corrente do tipo: $I(t) = I_m \cos(\omega t)$, onde ω é da ordem de algumas centenas de rad/s . Desta forma, conforme apresentado na figura 1(b), a corrente que passa a circular no fio interno $I(t)$, será a mesma que retornará pela casca externa. Nestas condições, determine a autoindutância por unidade de comprimento, L , desta linha de transmissão.
- (c) (30 %) Considerando ainda a situação descrita no item (b), calcule o vetor de Poynting, $\vec{S}(\rho, t)$ na região $a < \rho < b$ e a potência média que flui através da seção reta desta linha. Expresse seus resultados em função da corrente. Sugestão: No limite de baixas frequências, a solução já calculada para o campo elétrico, no item (a), continua sendo válida e a relação Q/l é dada por $Q/l = \sqrt{\mu\varepsilon} \cdot I$.
- (d) (20 %) Determine a impedância característica desta linha de transmissão.
-

QUESTÃO 4 – ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Plásmons superficiais são ondas eletromagnéticas localizadas numa interface entre uma superfície metálica e uma dielétrica. Em particular, estas ondas são formadas por campos que se propagam ao longo da interface, mas cujas amplitudes decaem exponencialmente na direção perpendicular à propagação conforme ilustrado na figura. Considere $\mu_1 = \mu_2 = 1$.



Por agora, considere uma onda transversal magnética (*TM*), cuja componente do campo elétrico \vec{E} , é descrita por: $\vec{E}_i(\vec{r}, t) = (E_{x,i}\hat{e}_x + E_{z,i}\hat{e}_z) \cdot e^{i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)}$, onde $\vec{k}_i = k_{x,i}\hat{e}_x + k_{z,i}\hat{e}_z$ e o índice i diz respeito ao meio material, $i = 1, 2$ conforme a figura. Note que por questão de consistência, é necessário que $k_{x,1} = k_{x,2} = k_x$, $k_{z,1} = +i\|k_{z,1}\|$ e $k_{z,2} = -i\|k_{z,1}\|$. Partindo das equações de Maxwell para um meio material com densidade de carga $\rho = 0$, e densidade de corrente $\vec{J} = 0$, pede-se:

- (10%) Calcule o campo magnético $\vec{H}_i(\vec{r})$ resultante de $\vec{E}_i(\vec{r})$.
 - (10%) Mostre que a relação $k_{x,i}E_{x,i} + k_{z,i}E_{z,i} = 0$ deve ser satisfeita.
 - (20%) Derive a equação diferencial que descreve a propagação das ondas eletromagnéticas e obtenha a relação de dispersão $k_{x,i}^2 + k_{z,i}^2 = (\varepsilon\omega/c)^2$.
 - (30%) Aplicando as condições de contorno apropriadas, mostre que o vetor de onda do plásmon superficial é dado por $k_x^2 = (\omega/c)^2 \cdot [(\varepsilon_1\varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]$.
 - (20%) Considerando a direção z , mostre que $k_{z,i}^2 = k_x^2(\varepsilon_1/\varepsilon_2)$, onde $i \neq j$.
 - (10%) Que condições são impostas em relação a ε_1 e ε_2 para que exista esta onda superficial conforme apresentado.
-